

Система оценивания экзаменационной работы единого государственного экзамена по математике**Ответы к заданиям 1–12**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Ответ
1	18,5
2	8
3	51
4	0,25
5	0,81
6	-5
7	5
8	8
9	30
10	20
11	36
12	-3

Номер
задания

Ответ

13

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sqrt{3} \cos x + 2 \sin x \cdot \cos x + 6 = 6; \cos x \cdot (2 \sin x + \sqrt{3}) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

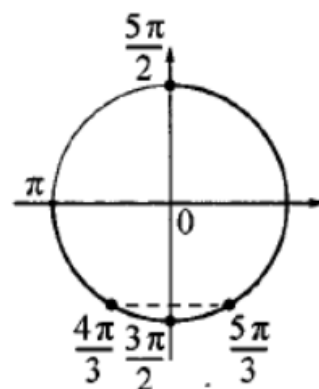
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}.$$



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение.

а) Пусть отрезки NB и MC пересекаются в точке E . Прямоугольные треугольники NAB и MBC равны по двум катетам, значит,

$$\begin{aligned}\angle MEB &= 180^\circ - (\angle EMB + \angle EBM) = \\ &= 180^\circ - (\angle EMB + \angle MCB) = 90^\circ.\end{aligned}$$

Отрезок BN — проекция отрезка NB_1 на плоскость ABC . Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Пусть плоскость α пересекает ребро CD в точке L . Прямые NL и CM , лежащие в плоскости ABC , параллельны, поскольку прямая NL лежит в плоскости α , параллельной прямой CM . Следовательно, $\angle DLN = \angle DCM = \angle BMC$, а значит, прямоугольные треугольники DLN и BMC подобны по острому углу. Получаем:

$$DL = BM \cdot \frac{DN}{BC} = \frac{AB}{2} \cdot \frac{AD}{2BC} = \frac{CD}{4}.$$

Заметим, что $\angle LNB_1 = 90^\circ$, поскольку прямая B_1N перпендикулярна прямой NL , параллельной прямой CM . Пусть ребро куба равно a . Получаем:

$$36 = B_1N^2 = AN^2 + AB^2 + BB_1^2 = \frac{9a^2}{4},$$

откуда

$$a = 4; BB_1 = a = 4, DN = 2, CL = 3, LN = \frac{a\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}.$$

Объём пирамиды $CNLB_1$ равен

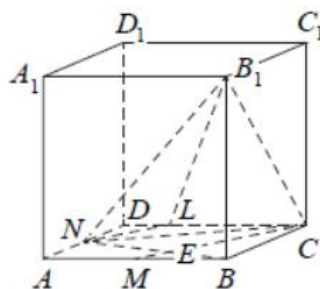
$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} CL \cdot DN \right) \cdot BB_1 = 4.$$

С другой стороны, объём этой пирамиды равен

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} NB_1 \cdot LN \right) \cdot x = x\sqrt{5},$$

где x — расстояние от точки C до плоскости α . Из равенства $x\sqrt{5} = 4$ получаем $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



14

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

15

Решение.Пусть $t = \log_2 x$, тогда неравенство примет вид:

$$(t^2 - 2t)^2 - 11(t^2 - 2t) + 24 < 0; (t^2 - 2t - 3)(t^2 - 2t - 8) < 0;$$

$$(t - 3)(t + 1)(t - 4)(t + 2) < 0,$$

откуда $-2 < t < -1$; $3 < t < 4$.При $-2 < t < -1$ получим: $-2 < \log_2 x < -1$, откуда $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$.При $3 < t < 4$ получим: $3 < \log_2 x < 4$, откуда $8 < x < 16$.Решение исходного неравенства: $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$; $8 < x < 16$.Ответ: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$; $(8; 16)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$5; \frac{5(n-1)}{n}; \dots; \frac{5 \cdot 2}{n}; \frac{5}{n}; 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$6; \frac{6(n-1)}{n}; \dots; \frac{6 \cdot 2}{n}; \frac{6}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1 + \frac{5}{n}; \frac{(n-1)+5}{n}; \dots; \frac{2+5}{n}; \frac{1+5}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$5 + \left(\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \right) = 5 + \frac{n+1}{2} \text{ (млн рублей).}$$

Общая сумма выплат равна 7,5 млн рублей, поэтому $n = 4$.

Ответ: 4.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение.

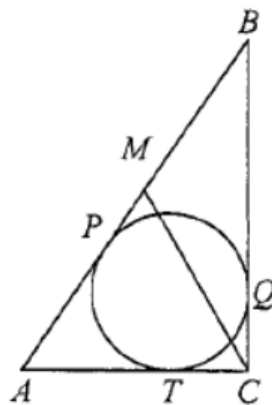
а) Обозначим точки касания окружности с отрезками BC и AC через Q и T соответственно. По свойству касательных:

$$AP = AT, CT = CQ, BP = BQ;$$

$$BC - AC = BQ + CQ - TC - AT = BQ - AT = BP - AP =$$

$$= AB - 2AP = 2AM - 2AP;$$

$$MP = |AM - AP| = \frac{|BC - AC|}{2}.$$



б) Поскольку $MC = MA = MB$, точка C лежит на окружности с диаметром AB , а значит, $\angle ACB = 90^\circ$, следовательно, радиус вписанной окружности треугольника ABC равен $CT = CQ$.

Пусть $CT = r$, $AT = x$, тогда $MP = \frac{7}{4}r$, $AC = x + r$. Поскольку $BC > AC$ и $\angle ACB = 90^\circ$, получаем:

$$BC = 2MP + AC = \frac{9}{2}r + x, AM = AP + MP = AT + MP = x + \frac{7}{4}r; AB = 2x + \frac{7}{2}r.$$

По теореме Пифагора в треугольнике ABC :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2; \left(2x + \frac{7}{2}r\right)^2 = (x + r)^2 + \left(x + \frac{9}{2}r\right)^2; 2x^2 + 3xr - 9r^2 = 0;$$

$$(x + 3r)(2x - 3r) = 0.$$

Получаем:

$$x = \frac{3}{2}r; AC = x + r = \frac{5}{2}r, BC = x + \frac{9}{2}r = 6r, \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5},$$

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{5}{12}.$$

Углы треугольника ABC равны 90° , $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $\operatorname{arctg} \frac{5}{12}$.

Ответ: б) 90° , $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $\operatorname{arctg} \frac{5}{12}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение.

При $x \leq 0$ уравнение

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

принимает вид:

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x - 9x = 0;$$

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a - 6x = 0;$$

$$(a - 2x)(a + x) - 6(a + x) = 0;$$

$$(a - 2x - 6)(a + x) = 0.$$

Получившееся уравнение задаёт

на плоскости Oxa пару лучей: луч l_1

с началом в точке $(0; 6)$, совпадающий

с прямой $a = 2x + 6$ при $x \leq 0$, и луч l_2

с началом в точке $(0; 0)$, совпадающий с прямой $a = -x$ при $x \leq 0$. Лучи l_1

и l_2 пересекаются в точке $(-2; 2)$.

При $x \geq 0$ уравнение $a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$ принимает вид:

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9x = 0; \quad a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 12x = 0;$$

$$(a - 2x)(a + x) - 6(a - 2x) = 0; \quad (a - 2x)(a + x - 6) = 0.$$

Получившееся уравнение задаёт на плоскости Oxa пару лучей: луч l_3

с началом в точке $(0; 6)$, совпадающий с прямой $a = 6 - x$ при $x \geq 0$, и луч l_4

с началом в точке $(0; 0)$, совпадающий с прямой $a = 2x$ при $x \geq 0$. Лучи l_3

и l_4 пересекаются в точке $(2; 4)$.

Число корней исходного уравнения равно числу точек пересечения прямой $a = c$ с объединением лучей l_1, l_2, l_3 и l_4 .

Каждый из лучей l_1 и l_3 пересекается с прямой $a = c$ в одной точке при $c \leq 6$ и не пересекается при $c > 6$.

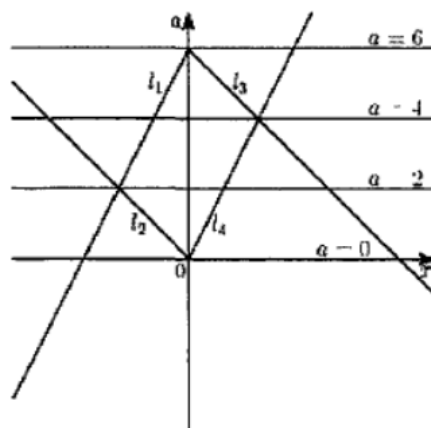
Каждый из лучей l_2 и l_4 пересекается с прямой $a = c$ в одной точке при $c \geq 0$ и не пересекается при $c < 0$.

Следовательно, при $a < 0$ и $a > 6$ исходное уравнение имеет два различных корня.

При $c = 0$, $c = 2$, $c = 4$ и $c = 6$ прямая $a = c$ проходит через общую точку лучей l_2 и l_4 , l_1 и l_2 , l_3 и l_4 , l_1 и l_3 соответственно.

Следовательно, при $a = 0$, $a = 2$, $a = 4$ и $a = 6$ исходное уравнение имеет ровно три корня, а при $0 < a < 2$, $2 < a < 4$ и $4 < a < 6$ имеет четыре различных корня.

Ответ: $0 < a < 2$; $2 < a < 4$; $4 < a < 6$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = 0$ и / или $a = 6$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(0; 6)$ множества значений a , возможно, с включением граничных точек и / или исключением точек $a = 2$ и / или $a = 4$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение.

а) Рассмотрим трёхзначное число 102. Сумма его цифр равна 3, а отношение числа к этой сумме равно 34.

б) Обозначим первую цифру трёхзначного числа через a , вторую — через b , третью — через c . Тогда число равно $100a+10b+c$, а сумма его цифр $a+b+c$, откуда получаем:

$$100a+10b+c=84a+84b+84c; 16a=74b+83c.$$

Левая часть полученного равенства не превосходит 144, поскольку $a \leq 9$. Следовательно, правая часть этого равенства не должна превосходить 144 и должна делиться на 16. При $b+c \geq 2$ правая часть больше 144, а для других значений b и c принимает значения 0, 74 и 83. Среди этих чисел только 0 делится на 16, но в этом случае число a должно равняться 0, что невозможно, поскольку исходное число трёхзначное. Таким образом, отношение не может быть равным 84.

в) Обозначим вторую цифру трёхзначного числа через b , а третью — через c . Тогда отношение числа к сумме его цифр равно

$$f(b; c) = \frac{400+10b+c}{4+b+c}.$$

Заметим, что

$$f(b; c) = 10 + \frac{9(40-c)}{4+b+c}.$$

Следовательно, при неотрицательных значениях b и c функция $f(b; c)$ убывает по каждому из аргументов. Для каждого значения $b+c$, начиная с наибольшего, будем искать однозначные числа b и c такие, чтобы $f(b; c)$ принимала целые значения.

Если $b+c=18$, то $f(18-c; c) = 10 + \frac{9(40-c)}{22}$ не принимает целых значений.

Если $b+c=17$, то $f(17-c; c) = 10 + \frac{9(40-c)}{21}$ принимает целое значение при $c=5$, но в этом случае $b=12$, что невозможно.

Если $b+c=16$, то $f(16-c; c) = 10 + \frac{9(40-c)}{20}$ принимает целое значение при $c=0$, но в этом случае $b=16$, что невозможно.

Если $b+c=15$, то $f(15-c; c) = 10 + \frac{9(40-c)}{19}$ принимает целое значение при $c=2$, но в этом случае $b=13$, что невозможно.

Если $b+c=14$, то $f(14-c; c) = 10 + \frac{9(40-c)}{18}$ принимает целое значение при чётных c , при этом наименьшее значение достигается при $c=8$ и $b=6$ и равно 26.

$$\text{Если } b+c \leq 13, \text{ то } f(b; c) = 10 + \frac{9(40-c)}{4+b+c} \geq 10 + \frac{9(40-9)}{4+13} > 26.$$

Таким образом, наименьшее значение искомого отношения равно 26 для числа 468 и суммы его цифр.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4